

Bevezetés a Végeselem Módszerbe

“Finite Elements for Fun and Profit”

Stoyan Gisbert

ELTE IK, Numerikus Analízis Tanszék
<http://numanal.inf.elte.hu/~stoyan>

Kecskemét 2009.05.06.

Az előadás terve

- Alapvető végeelem fogalmak;

Az előadás terve

- Alapvető végeelem fogalmak;
- a végeelem módszer a matematikus szemével (az elmélet szépsége);

Az előadás terve

- Alapvető végeelem fogalmak;
- a végeelem módszer a matematikus szemével (az elmélet szépsége);
- a módszer a mérnök szemével (sokoldalú szerszámláda);

Az előadás terve

- Alapvető végeelem fogalmak;
- a végeelem módszer a matematikus szemével (az elmélet szépsége);
- a módszer a mérnök szemével (sokoldalú szerszámláda);
- végeelem kutatás;

Az előadás terve

- Alapvető végeelem fogalmak;
- a végeelem módszer a matematikus szemével (az elmélet szépsége);
- a módszer a mérnök szemével (sokoldalú szerszámláda);
- végeelem kutatás;
- végeelem programok;

Az előadás terve

- Alapvető végeelem fogalmak;
- a végeelem módszer a matematikus szemével (az elmélet szépsége);
- a módszer a mérnök szemével (sokoldalú szerszámláda);
- végeelem kutatás;
- végeelem programok;
- Irodalom.

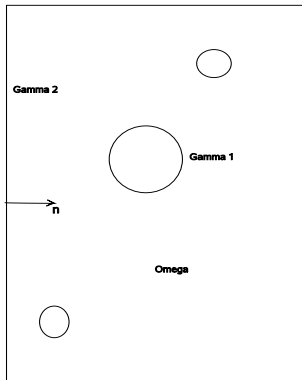
Peremérték feladatok

Példa: vegyes Poisson feladat; tartomány és pereme

$\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$): lipschitz-folytonos tartomány

pereme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

n a külső normálvektor:



Peremérték feladatok

Példa: vegyes Poisson feladat; az egyenletek

Keressük az olyan u függvényt, hogy adott f és g_2 esetén

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2, \quad x \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

megoldások

klasszikus megoldás: $u \in C(\overline{\Omega})^d$

gyenge megoldás: u és első deriváltjai négyzetesen integrálhatóak és $u = 0$ ha $x \in \Gamma_1$ (azaz $u \in H_0^1(\Omega)$)

Variációs feladat

Legyen

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial v}{\partial x_{\ell}} dx =: (u, v)_1,$$

ahol $(\cdot, \cdot)_1$ jelöli a H_0^1 -skalárszorzatot

A vegyes Poisson feladat variációs megfogalmazásban:

$$a(u, v) = \varphi(v) := (f, v) + \int_{\Gamma_2} v(s)g_2(s) ds, \quad \text{minden } v \in H_0^1(\Omega)\text{-re}$$

Alapvető tulajdonságok: $a(u, v) = a(v, u)$ szimmetrikus, és bilineáris:

$$a(u + \alpha w, v) = a(u, v) + \alpha a(w, v)$$

korlátos és elliptikus:

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_1 \|v\|_1, \quad a(u, u) = \|u\|_1^2 \geq 0$$

Az elmélet szépsége

A φ lineáris funkcionál $H_0^1(\Omega)$ -ban:

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &\leq |(f, v)| + \left| \int_{\Gamma_2} v(s)g_2(s) ds \right| \\ &\leq \|f\| \|v\| + \|g_2\|_{\Gamma_2} \|v\|_{\Gamma_2} \\ &\leq c_0(\|f\| + \|g_2\|_{\Gamma_2}) \|v\|_1 \end{aligned}$$

A Riesz-tétel biztosítja a variációs feladat stabil megoldhatóságát:

$H_0^1(\Omega)$ Hilbert-tér, φ lineáris funkcionál $H_0^1(\Omega)$ -ban és a ott skalárszorzat, ezért létezik olyan $u_* \in H_0^1$, hogy

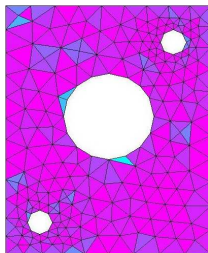
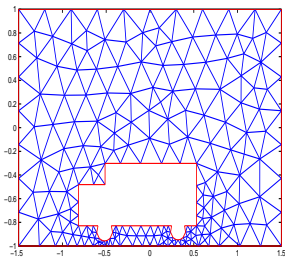
$$\varphi(v) = a(u_*, v) \quad \text{minden } v \in H_0^1(\Omega)\text{-re,}$$

tehát $u = u_*$ megoldás. Továbbá

$$\|u_*\|_1^2 = a(u_*, u_*) = \varphi(u_*) \leq c_0(\|f\| + \|g_2\|_{\Gamma_2}) \|u_*\|_1 - \text{vagyis}$$

$$\|u_*\|_1 \leq c_0(\|f\| + \|g_2\|_{\Gamma_2}).$$

Diszkrétizáció 1: Triangularizáció

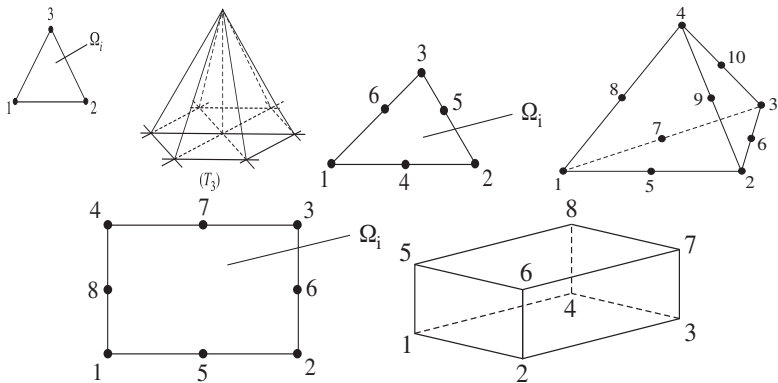


Kiss B., Krebsz A., On the relational database type numerical programming. Paper 48 in: Proc. 3rd Intern. Conference on Engineering Computational Technology: ECT 2002 (B.H.V. Topping, Z. Bittnar, eds.).

Lohner R., Extensions and Improvements of the **Advancing Front Grid Generation** Technique, Communications in Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd, Vol 12, pp.683-702, 1996.

Joseph R. Tristano, Steven J. Owen and Scott A. Canann (ANSYS), Advancing Front Surface Mesh Generation in Parametric Space Using a Riemannian Surface Definition. <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/riemann/riemann.html>

Diszkretizáció 2: Végeselemek



A diszkrét feladat

A diszkrét variációs feladat:

Keressük $u_h = \sum_{j=1}^N y_j w_j \in V_h := \text{span}\{w_j\}_{j=1}^N \subset H_0^1(\Omega)$ úgy, hogy

$$a(u_h, v_h) = \varphi(v_h), \quad \text{minden } v_h \in V_h\text{-ra.}$$

u_h a (konform) végelem megoldás.

Az elmélet szépsége: a Riesz-tétel biztosítja most is a variációs feladat stabil megoldhatóságát: V_h Hilbert-tér

φ lineáris funkcionál és a skalárszorzat V_h -ban, ezért most létezik $u_h \in V_h$ és

$$\|u_h\|_1 \leq c_0(\|f\| + \|g_2\|_{\Gamma_2}).$$

A diszkrét variációs feladat ekvivalens lineáris rendszerrel:

$$A_h y_h = b_h, \quad \text{ahol } y_h := (y_1, \dots, y_N)^T, \quad b_h := (\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_N))^T$$

A számítógépes program lépései:

- A tartomány inputja és triangularizációja;

A számítógépes program lépései:

- A tartomány inputja és triangulációja;
- Sok integrál számítása: a mátrix elemei:

$$A_h := (a_{ij})_{i,j=1}^N, \quad a_{ij} = a(w_j, w_i) = \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial w_j}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial w_i}{\partial x_{\ell}} dx,$$

a jobboldali vektor komponensei:

$$b_i := \varphi(w_i) = (f, w_i) + \int_{\Gamma_2} w_i(s) g_2(s) ds;$$

A számítógépes program lépései:

- A tartomány inputja és triangularizációja;
- Sok integrál számítása: a mátrix elemei:

$$A_h := (a_{ij})_{i,j=1}^N, \quad a_{ij} = a(w_j, w_i) = \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial w_j}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial w_i}{\partial x_{\ell}} dx,$$

a jobboldali vektor komponensei:

$$b_i := \varphi(w_i) = (f, w_i) + \int_{\Gamma_2} w_i(s) g_2(s) ds;$$

- az $A_h y_h = b_h$ lineáris rendszer megoldása nagyméretű ritka mátrixszal:

A számítógépes program lépései:

- A tartomány inputja és triangularizációja;
- Sok integrál számítása: a mátrix elemei:

$$A_h := (a_{ij})_{i,j=1}^N, \quad a_{ij} = a(w_j, w_i) = \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial w_j}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial w_i}{\partial x_{\ell}} dx,$$

a jobboldali vektor komponensei:

$$b_i := \varphi(w_i) = (f, w_i) + \int_{\Gamma_2} w_i(s) g_2(s) ds;$$

- az $A_h y_h = b_h$ lineáris rendszer megoldása nagyméretű ritka mátrixszal;
- a megoldás előállítás, ábrázolása és értékelése;

A számítógépes program lépései:

- A tartomány inputja és triangularizációja;
- Sok integrál számítása: a mátrix elemei:

$$A_h := (a_{ij})_{i,j=1}^N, \quad a_{ij} = a(w_j, w_i) = \int_{\Omega} \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial w_j}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial w_i}{\partial x_{\ell}} dx,$$

a jobboldali vektor komponensei:

$$b_i := \varphi(w_i) = (f, w_i) + \int_{\Gamma_2} w_i(s) g_2(s) ds;$$

- az $A_h y_h = b_h$ lineáris rendszer megoldása nagyméretű ritka mátrixszal;
- a megoldás előállítás, ábrázolása és értékelése;
- ennek alapján a következő számítás (adaptív eljárás).

Rugalmasságtani feladatok

Alapvető a (rugalmas test) potenciális energiája:

$$\Pi(f) := \frac{1}{2} \int \int_V \int \sigma^T \varepsilon \, dv - \int \int_V \int p^T f \, dv - \int \int_S q^T f \, ds - \sum_i F_i^T f_i$$

ahol σ a feszültségi, ε a deformációs tenzor ($\sigma = D\varepsilon$ a Hooke törvény szerint),
 p, q, F_i térbeli, felületi, koncentrált erők, f a keresett eltolások vektora

Például a Helmholtz-féle lemezek esetén:

$$\begin{aligned} \Pi(w) &:= \frac{1}{2} D \int \int_{\Omega} \{ w_{xx}^2 + 2\nu w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + 2(1-\nu) w_{xy}^2 \} \, dx \, dy \\ &\quad - \int \int_{\Omega} p w \, dx \, dy - \sum_i F_i w_i, \text{ ahol most } \varepsilon = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 0 \right)^T, \end{aligned}$$

továbbá $D := \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ és h a lemez merevsége és vastagsága, ν a Poisson-együttható, p a függőleges terhelés, w a keresett kitérés

A Ritz-eljárás (1909)

Keressük a potenciális energia minimumát véges altérben:

$$f = w_0 + \sum_{j=1}^N y_j w_j, \quad \mathcal{J}(y) := \Pi(f) \rightarrow \min!$$

ahol w_0 a rögzítési mellékfeltételeket elégíti ki és $y = (y_1, \dots, y_N)^T$

Kiszámítva, szimmetrikus és pozitív szemidefinit A mátrixszal:

$$\mathcal{J}(y) = \frac{1}{2} y^T A y - b^T y + c,$$

(itt c egy w_0 -val összefüggő konstans) és a minimum elsőrendű feltétele

$$A y = b$$

Most csak még a w_j -k gyanánt kell végeelem bázisfüggvényeket venni ...

Két profi végelem program: ANSYS, CivilFem

<http://www.ansys.com>

Lehetséges alkalmazások

Multiphysics, Structural Mechanics, Fluid Dynamics, Explicit Dynamics, Electromagnetics

Néhány rendelkezésre álló végelem fajta:

háromszöges, téglalapos és isoparametrikus négyszögű elemek, hexaéder, tetraéder, 2-D és 3-D rácsos tartó struktúrák elemei, 2-D and 3-D gerendák, lemezek, héjak elemei, rugó- és cső-elemek ...

<http://www.civildem.com>

Lehetséges alkalmazások

Geotechnikai alkalmazások, hidak és építőmérnöki nemlinearitások, előfeszített struktúrák, vasbeton struktúrák

Néhány letölthető végeelem program:

- **Free Finite Element Package**, <http://ffep.sourceforge.net>. A modular designed collection of C libraries. These libraries contain numerical methods required when working with linear and quadratic Finite Elements in two dimensions. FFEP works on GNU/Linux.
- **PLAXIS Finite Element Code for Soil and Rock Analysis**, <http://www.plaxis.nl/index.php?cat=bulletins>. Plaxis is a range of finite element packages intended for 2D and 3D analysis of deformation, stability and groundwater flow in geotechnical engineering.
- **FEAST**, <http://www.feast.uni-dortmund.de/downloads.html>. Finite Element Analysis & Solutions Tools, a Software for High Performance Finite Element Methods: Computational Fluid Dynamics: Stokes and Navier-Stokes problems; Computational Structural Mechanics: Elasticity; Preprocessing: Grid3D is our preprocessing tool for FEAST and its predecessor FEATFLOW.
- **NGSolve**, <http://www.hpfem.jku.at/ngsolve/index.html>. NGSolve is a general purpose 3D finite element solver supporting scalar (heat flow), elasticity and magnetic field problems. The package provides C++ source code and performs adaptive mesh refinement, the matrix equations are solved by optimal order multigrid methods.

Néhány magyarországi internetes keresés eredménye:

- **eCon Engineering Kft.**, <http://www.econengineering.com/>, 2002-ben alakult gépészeti vállalkozás: H-1089 Budapest, Korányi Sándor u. 3/b
Programok: ANSYS, Moldex3D, LMS/Virtual.Lab
Vizsgálatok egyszerű lineáris feszültséganalízistől bonyolult tranziens nemlineáris kontakt problémákig
- **Széchenyi István Egyetem Győr**, **Pere Balázs**, <http://www.sze.hu/perebal/publikaciok.html>
B. Pere, I. Páczelt: A mapping technique for a heat conduction problem on moving mesh using the hp-version of the finite element method ...
- **Dr. Égert János**, Belsőégésű motorok végeleemes szilárdságtani és dinamikai modellezése és szimulációja
- **Miskolci Egyetem**, Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola <http://www.siphd.uni-miskolc.hu/oktatas-kutatas/kutatas.php3?261>
Dr. Bertóti Edgár:
Szilárd testek nemlineáris alakváltozásának numerikus modellezése többmezős variációs elvek és végelelem-modellek alkalmazásával
- **Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen**, Műszaki Mechanikai Tanszék, <http://www.bme.mmt.hu/> **Dr. Stépán Gábor:** Nemlineáris dinamika, szerszámgép rezgések, mozgás stabilitása

Irodalom

- O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science. London, New York, McGraw-Hill, 1971.
- O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The Finite Element Method, 3 Vols.: Its Basis and Fundamentals; For Solid and Structural Mechanics; For Fluid Dynamics. 6th ed., Butterworth Heinemann, 2005.
- P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam, North-Holland 1978.
- O. Axelsson, V.A. Barker, Finite Element Solution of Boundary Value Problems : Theory and Computation. Academic Press, New York 1984.
- O. Axelsson, Neytcheva, M., Preconditioning methods for linear systems arising in constrained optimization problems. Numer. Lin. Algebra 10 (2003), 3–31.
- Handbook of Numerical Analysis v. II., Finite Element methods (Ciarlet P.G., Lions J., eds.) North-Holland 1991.
- Stoyan G., Takó G., Numerikus Módszerek I (2. kiadás: 2002), II (1995), III (1997 és 2008), Typotex, Budapest.
- Á. Baran, G. Stoyan, Gauss-Legendre elements: a stable, higher order non-conforming finite element family. Computing 79 (2007), 1–21.